ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HOÀNG THỊ HẬU

PHƯƠNG PHÁP LAI GHÉP GIẢI MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 5/2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HOÀNG THỊ HẬU

PHƯƠNG PHÁP LAI GHÉP GIẢI MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN, 5/2019

Mục lục

Bảng ký hiệu **1**

Mở đầu **2**

Chương 1 Một lớp bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach **4**

1.1 Không gian Banach 4

1.1.1 Không gian Banach phản xạ, lồi đều 5

1.1.2 Phép chiếu mêtric trong không gian Banach 7

1.1.3 Ánh xạ loại đơn điệu trong không gian Banach . . . 8

1.2 Bất đẳng thức biến phân loại đơn điệu 12

1.2.1 Bất đẳng thức biến phân đơn điệu 12

1.2.2 Bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu 13

Chương 2 Phương pháp lai ghép giải một lớp bất đẳng thức biến phân **15**

2.1 Phương pháp lai ghép đường dốc nhất 15

2.1.1 Bài toán 15

2.1.2 Phương pháp 16

2.2 Sự hội tụ của phương pháp 18

2.2.1 Sự hội tụ của Phương pháp (2.1.2) 18

2.2.2 Sự hội tụ của Phương pháp (2.1.3) 24

2.2.3 Sự hội tụ của Phương pháp (2.1.4) 29

2.2.4 Ví dụ minh họa 34

Kết luận **36**

Tài liệu tham khảo **37**

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$D(F)$	miền xác định của ánh xạ F
$R(F)$	miền giá trị của ánh xạ F
F^{-1}	ánh xạ ngược của ánh xạ F
I	ánh xạ đồng nhất
$l^p,\ 1 \le p < \infty$	không gian các dãy số khả tổng bậc p
l_∞	không gian các dãy số bị chặn
$L^p[a,b],\ 1 \le p < \infty$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian vô hạn chiều được nhà toán học người Italia là Stampacchia (xem [12]) và các đồng sự đưa ra lần đầu tiên vào những năm đầu của thập niên 60 thế kỉ XX trong khi nghiên cứu về bài toán biên tự do. Bất đẳng thức biến phân có vai trò quan trọng trong nghiên cứu toán học lý thuyết về bài toán tối ưu, bài toán điều khiển, bài toán cân bằng, bài toán bù, bài toán giá trị biên v.v ... Do đó, việc nghiên cứu các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân đang là một trong những đề tài thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước và đã nhận được nhiều kết quả hay, sâu sắc. Bên cạnh đó, bất đẳng thức biến phân còn có nhiều ứng dụng cho các bài toán thực tế như mô hình cân bằng trong kinh tế, giao thông, bài toán khôi phục tín hiệu, bài toán công nghệ lọc không gian, bài toán phân phối băng thông v.v ... (xem [8], [10], [11]). Cho đến nay vẫn còn nhiều vấn đề mới và khó của bất đẳng thức biến phân cần được quan tâm nghiên cứu với những công cụ toán học hiện đại. Một trong những hướng nghiên cứu đang được quan tâm là xây dựng phương pháp giải bất đẳng thức biến phân với tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn, tập không điểm chung của một họ ánh xạ loại j-đơn điệu, tập nghiệm chung của bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động trong không gian Hilbert và không gian Banach.

Mục tiêu của đề tài luận văn là trình bày phương pháp lai ghép đường dốc nhất giải một lớp bất đẳng thức biến phân trong bài báo [5], [6] và

[9] của Nguyễn Bường, Nguyễn Song Hà và Nguyễn Thị Thu Thủy công bố năm 2016, 2017 và 2018.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 "Một lớp bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach". Chương này giới thiệu một số kiến thức cơ bản về không gian Banach phản xạ, lồi đều, ánh xạ đơn điệu, j-đơn điệu trong không gian Banach. Đồng thời, trình bày về bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và j-đơn điệu trong không gian Banach. Chương 2 "Phương pháp lai ghép giải một lớp bất đẳng thức biến phân". Chương này trình bày ba phương pháp lai ghép giải bài toán bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach cùng các định lý hội tụ mạnh của các phương pháp. Phần cuối của chương là một ví dụ minh họa cho các điều kiện trong các định lý hội tụ mạnh được thỏa mãn.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong Khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy - Người đã tận tình hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu trường THPT Hàm Long đã tạo điều kiện tốt nhất để tác giả được tham gia học tập, nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Tác giả luận văn

Hoàng Thị Hậu

Chương 1

Một lớp bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Chương này giới thiệu một số kiến thức về không gian Banach và bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu, j-đơn điệu trong không gian Banach. Cụ thể Mục 1.1 trình bày về không gian Banach phản xạ, lồi đều, phép chiếu mêtric trong không gian Banach, ánh xạ đơn điệu, ánh xạ j-đơn điệu trong không gian Banach. Mục 1.2 trình bày khái niệm và ví dụ về bài toán bất đẳng thức biến phân đơn điệu và bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach. Nội dung của chương được viết trên cơ sở tổng hợp kiến thức từ các tài liệu [1], [2], [3] và [7].

1.1 Không gian Banach

Cho E là không gian Banach và ký hiệu E^* là không gian đối ngẫu của E. Trong luận văn này ta sử dụng ký hiệu $\|.\|$ cho chuẩn của cả hai không gian E và E^*. Với mỗi $x \in E$ và $x^* \in E^*$ ta viết $\langle x^*, x\rangle$ hoặc $\langle x, x^*\rangle$ (tích đối ngẫu) thay cho $x^*(x)$. Nếu $E = H$ là không gian Hilbert thì tích đối ngẫu chính là tích vô hướng $\langle ., .\rangle$ và cảm sinh chuẩn tương ứng $\|.\|$.

1.1.1 Không gian Banach phản xạ, lồi đều

Định nghĩa 1.1.1 (xem [1]) Không gian Banach E được gọi là phản xạ, nếu với mọi phần tử $x^{**} \in E^{**}$, không gian liên hợp thứ hai của E, đều tồn tại phần tử $x \in E$ sao cho

$$x^*(x) = x^{**}(x^*) \quad \forall x^* \in E^*.$$

Định lý 1.1.2 (xem [2]) *Cho E là không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(i) E là không gian phản xạ.

(ii) Mọi dãy bị chặn trong E đều có một dãy con hội tụ yếu.

Ví dụ 1.1.3 Các không gian định chuẩn hữu hạn chiều, không gian Hilbert H, không gian l^p, $L^p[a, b]$, $1 < p < \infty$ là các không gian Banach phản xạ.

Ký hiệu $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của không gian Banach E.

Định nghĩa 1.1.4 (xem [2]) Không gian Banach E được gọi là

(i) lồi chặt nếu với mọi điểm $x, y \in S_E$, $x \neq y$, suy ra

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0, 1);$$

(ii) lồi đều nếu với mọi $\varepsilon \in (0, 2]$ và các bất đẳng thức $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ thỏa mãn thì tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left\|\frac{(x + y)}{2}\right\| \leq 1 - \delta;$$

(iii) trơn nếu giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

tồn tại với mọi $x, y \in S_E$.

Ví dụ 1.1.5

(i) Không gian $E = \mathbb{R}^n$ với chuẩn $\|x\|_2$ được xác định bởi

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

là không gian lồi chặt. Không gian $E = \mathbb{R}^n, n \geq 2$ với chuẩn $\|x\|_1$ xác định bởi

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

không phải là không gian lồi chặt.

(ii) Không gian Hilbert H là không gian lồi đều.

Mệnh đề 1.1.6 (xem [2]) *Mọi không gian Banach lồi đều là không gian phản xạ và lồi chặt.*

Định nghĩa 1.1.7 (xem [2])

(i) Chuẩn của không gian Banach E được gọi là khả vi Gâteaux nếu với mỗi $y \in S_E$ giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1.1}$$

tồn tại với $x \in S_E$, ký hiệu $\langle y, \triangledown \|x\| \rangle$. Khi đó $\triangledown \|x\|$ được gọi là đạo hàm Gâteaux của chuẩn.

(ii) Chuẩn của E được gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với mỗi $y \in S_E$, giới hạn (1.1) đạt được đều với mọi $x \in S_E$.

(iii) Chuẩn của E được gọi là khả vi Fréchet nếu với mỗi $x \in S_E$, giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $y \in S_E$.

(iv) Chuẩn của E được gọi là khả vi Fréchet đều nếu giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x, y \in S_E$.

Ví dụ 1.1.8 Không gian Hilbert H là không gian có chuẩn khả vi Gâteaux với $\triangledown \|x\| = x/\|x\|,\ x \neq 0$. Thật vậy, với mỗi $x \in H$ với